Raccolta di problemi numerici

1) Quanto vale l'ultima cifra del risultato di

$$6^{2003} + 6^{2002} + \dots\dots\dots + 6^2 + 6 + 1 \ ?$$

2) Per quanti valori interi n (con $100 \le n \le 200$) la frazione $\dfrac{n^2 - 3}{n^2 - 1}$ è riducibile ?

3) Risolvi la seguente equazione

$$\frac{x+1}{1} + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} + \dots\dots\dots + \frac{x+2001}{2001} = 2001$$

4) Se $x + 1/x = 3$, quanto vale $x^4 + 1/x^4$?

5) Se x, y, z sono > 0 e xyz = 1, quanto vale l'espressione

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} \ ?$$

6) Supponiamo che $ax^2 + 2bx + c = 0$ (a, b, c numeri reali diversi da zero) abbia due radici uguali. Quali delle seguenti affermazioni è sempre corretta ?
(A) a, b, c sono mutuamente differenti
(B) a, b, c sono numeri negativi
(C) $b < 0$, $a > 0$, $c > 0$
(D) a, b, c sono termini successive di una progressione aritmetica
(E) a, b, c sono termini successivi di una progressione geometrica

7) $\dfrac{3^{2006}}{2^{2004} + 3^{2005}}$ è un numero compreso tra
(A) 0 e 1 (B) 1 e 2 (C) 2 e 3 (D) 3 e 5 (E) 5 e 9

8) Trova le soluzioni del seguente problema :
trovare tre differenti numeri naturali $a < b < c$ tali che $1/a + 1/b + 1/c$ sia un intero.

9) Se n è un numero naturale , quanto vale l'espressione

$$\frac{1+3+5+7+9+\dots\dots\dots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\dots\dots+(4n-1)}$$

10) Definiamo $n! = n \bullet (n-1) \bullet (n-2) \bullet \dots\dots\dots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$ (ad es. $4! = 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1$). Se dividiamo 1991! per 1992 , il resto sarà

11) Un polinomio ha resto 3 se diviso per $x - 1$ e resto 5 se diviso per $x - 3$. Determinare il resto della divisione per $(x - 1)(x - 3)$.

12) Determina i valori di a per cui l'espressione $21x^2 + ax + 21$ si possa decomporre nel prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti interi.

13) Calcola

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$$

14) Trova il numero di soluzioni intere (x, y) che soddisfano le condizioni $\begin{cases} x \leq y \leq 99 \\ x + y > 99 \end{cases}$

15) Qual è il numero di funzioni con dominio {a,b,c,d} i cui corrispondenti sono nell'insieme {1,2,3} ?

16) Dimostrare che $\forall\ n \in N_o$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

17) Il simbolo n! significa $1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \ldots\ldots \bullet (n-1) \bullet n$. Si ha allora $7! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7$

I numeri primi p tali che $77! + 1 < p < 77! + 77$ sono

(A) 0 (B) 1 (C) 7 (D) 11 (E) 17

18) Quante sono le soluzioni reali dell'equazione $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$?

19) Trova l'insieme delle soluzioni, se esistono, $(x,y) \in Z \times Z$ dell'equazione $x^2 + y^2 + x + y = 3$

20) Data l'equazione, con $r > 0$ e $r \neq 1$,

$$x^4 - (r - 1)x^2 + r = 0,$$

determinare il valore di r perché le soluzioni siano in progressione aritmetica